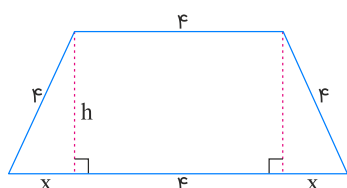




مرحله ۱: تابع هدف، همان مساحت دوزنقه است:

$$S = ((\text{قاعده کوچک}) + (\text{قاعده بزرگ})) \times \frac{1}{2}h$$

شکل مسئله را ببینید و به نام‌گذاری‌ها دقت کنید:



$$S = ((4 + 2x) + 4) \times \frac{1}{2}h \Rightarrow S = (4 + x)h$$

همان‌طورکه می‌بینید، تابع فوق دو متغیره است و برای تک متغیره کردن آن، نیاز به تابع فرض یعنی رابطه‌ای بین x و h داریم.
مرحله ۲: تابع فرض در صورت سؤال داده نشده، بلکه از روی شکل قابل شناسایی است. کافی است در یکی از مثلث‌های قائم الزاویه، رابطه فیثاغورس را بنویسیم:

$$h^2 + x^2 = 16 \Rightarrow h^2 = 16 - x^2 \Rightarrow h = \sqrt{16 - x^2}$$

مرحله ۳: از تابع فرض در تابع هدف جای‌گذاری می‌کنیم:

$$S = (4 + x)h \xrightarrow{h=\sqrt{16-x^2}} (4 + x)\sqrt{16 - x^2} \Rightarrow S = (4 + x)\sqrt{16 - x^2}$$

مرحله ۴: نقاط بحرانی این تابع را به دست می‌آوریم:

$$S'(x) = (1)\sqrt{16 - x^2} + \left(\frac{-2x}{2\sqrt{16 - x^2}}\right)(4 + x) = 0$$

$$\Rightarrow \sqrt{16 - x^2} = \frac{x^2 + 4x}{\sqrt{16 - x^2}} \Rightarrow 16 - x^2 = x^2 + 4x$$

$$\Rightarrow 2x^2 + 4x - 16 = 0 \Rightarrow x^2 + 2x - 8 = 0 \Rightarrow x = -4, 2$$

واضح است که $x = -4$ در هندسه! معنا ندارد و $x = 2$ قابل قبول است. پس بیشترین مقدار S به ازای $x = 2$ خواهد بود و برابر است با:

$$S = (4 + x)\sqrt{16 - x^2} \xrightarrow{x=2} 6\sqrt{12} = 12\sqrt{3}$$

منظور سوال این است که مساحت کل این قوطی استوانه‌ای در باز برابر با ۱۲ سانتی‌مترمربع است. یعنی:

$$S_{\text{جانبی}} + S_{\text{قاعده}} = 12 \Rightarrow 2\pi rh + \pi r^2 = 12 \quad (1)$$

قرار است گنجایش یا حجم آن ماکزیمم شود. تابع هدف را می‌نویسیم:

$$V = \pi r^2 h \quad (2)$$

به کمک رابطه (۱)، تابع هدف را تک‌متغیره می‌کنیم:

$$2\pi rh + \pi r^2 = 12 \Rightarrow h = \frac{12 - \pi r^2}{2\pi r}$$

حالا در رابطه (۲) به جای h جای‌گذاری می‌کنیم:

$$V = \pi r^2 \times \frac{12 - \pi r^2}{2\pi r} = \frac{r}{2}(12 - \pi r^2) = 6r - \frac{\pi r^3}{2}$$

$$V' = 6 - \frac{3}{2}\pi r^2 = 0 \Rightarrow r^2 = \frac{12}{3\pi} = \frac{4}{\pi} \Rightarrow r = \frac{2}{\sqrt{\pi}}$$

نقطه A روی منحنی $y = \sqrt{x^2 + 2x + 8}$ را به صورت $A(x, \sqrt{x^2 + 2x + 8})$ در نظر می‌گیریم.
فاصله $A(x, \sqrt{x^2 + 2x + 8})$ تا $B(-3, 0)$ را می‌نویسیم:

$$AB = \sqrt{(x+3)^2 + (\sqrt{x^2 + 2x + 8} - 0)^2} = \sqrt{2x^2 + 8x + 17}$$

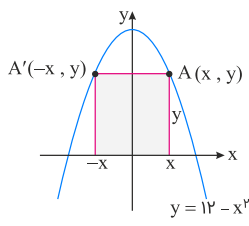
ریشه مشتق عبارت فوق را پیدا می‌کنیم:

$$\frac{4x + 8}{2\sqrt{2x^2 + 8x + 17}} = 0 \Rightarrow x = -2$$

$x = -2$ را در $\sqrt{2x^2 + 8x + 17}$ قرار می‌دهیم:

$$\min(AB) = \sqrt{8 - 16 + 17} = \sqrt{9} = 3$$

در این مسئله تابعی که باید ماکزیمم شود، مساحت مستطیلی است که محدود به سهمی $y = 12 - x^2$ و محور x ها می‌باشد. نقطه دلخواه $A(x, y)$ و $A'(-x, y)$ را روی سهمی در نظر بگیرید. مساحت مستطیل سایه‌زده در شکل زیر برابر است با:



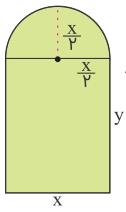
$$S = \text{طول} \times \text{عرض} \xrightarrow{y=12-x^2} S(x) = 2x(12 - x^2) = 24x - 2x^3$$

$$\xrightarrow{\text{مشتق می‌گیریم}} S'(x) = 24 - 4x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 6$$

$$\xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} x = 2, y = 8$$

$$\Rightarrow S_{\max} = 32$$

اولاً محیط شکل برابر ۳۰ واحد است:



$$\text{محیط: } \pi\left(\frac{x}{2}\right) + 2y + x = 30 \Rightarrow y = \frac{30 - x - \frac{\pi}{2}x}{2}$$

مساحت برابر است با:

$$S = \frac{\pi}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^2 + xy = \frac{\pi}{2} \frac{x^2}{4} + x\left(\frac{30 - x - \frac{\pi}{2}x}{2}\right)$$

$$= \frac{\pi x^2}{8} + 15x - \frac{x^2}{2} - \frac{\pi x^2}{4}$$

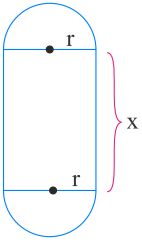
مشتق مساحت را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$S' = \frac{\pi x}{4} + 15 - x - \frac{\pi x}{2} = 0 \Rightarrow x\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{2} - 1\right) = -15$$

$$\Rightarrow x\left(-\frac{\pi}{4} - 1\right) = -15 \Rightarrow x = \frac{15}{\frac{\pi}{4} + 1} = \frac{60}{\pi + 4}$$

پس به ازای $x = \frac{60}{\pi + 4}$ مشتق صفر می‌شود و مساحت ماکزیمم است.

ابتدا یک شکل برای مسئله رسم می‌کنیم:



مطابق شکل داریم:

محیط دو نیم‌دایره + $2x$ = محیط پنجره

$$= 2x + 2\left(\frac{1}{2} \times 2\pi r\right) = 2x + 2\pi r \xrightarrow{\text{محیط}=100} 2x + 2\pi r = 100$$

$$\Rightarrow x + \pi r = 100 \quad (*)$$

می‌خواهیم این پنجره بیشترین نوردهی را داشته باشد، به عبارتی مساحت آن ماکزیمم شود:

مساحت دو نیم‌دایره + مساحت مستطیل = مساحت پنجره

$$= x \times 2r + 2\left(\frac{1}{2}\pi r^2\right)$$

$$\Rightarrow S = 2rx + \pi r^2 \xrightarrow[x=100-\pi r]{(*)} 2r(100 - \pi r) + \pi r^2 = 200r - 2\pi r^2 + \pi r^2 = 200r - \pi r^2$$

حال نقطه بحرانی تابع مساحت را به دست می‌آوریم:

$$S' = 200 - 2\pi r = 0 \Rightarrow 200 = 2\pi r \Rightarrow r = \frac{100}{\pi} = 100 \times \frac{1}{\pi}$$

$$C'(t) = \frac{6t(t^3 + 4) - 3t^2(3t^2)}{(t^3 + 4)^2} = 0$$

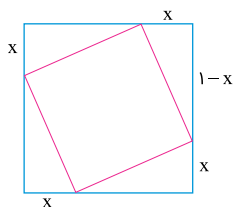
$$\Rightarrow 3t(2t^3 + 4 - 3t^2) = 0 \Rightarrow t^3 = 4 \Rightarrow t = 2$$

بیشترین غلظت

$$V = \pi r^2 h = 330 \Rightarrow h = \frac{330}{\pi r^2}$$

$$S = \text{مساحت دو قاعده} + \text{مساحت جانبی} = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r^2 + 2\pi r \left(\frac{330}{\pi r^2}\right) = 2\left(\pi r^2 + \frac{330}{r}\right)$$

$$S' = 2\left(2\pi r - \frac{330}{r^2}\right) = 0 \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{165}{\pi}} \text{ cm}$$



طول اضلاع مربع جدید برابر است با:

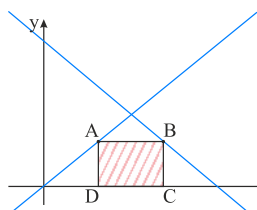
$$\sqrt{x^2 + (1-x)^2} = \sqrt{x^2 + x^2 - 2x + 1} = \sqrt{2x^2 - 2x + 1}$$

مساحت مربع جدید برابر است با: $2x^2 - 2x + 1$

ماکزیمم مساحت به ازای $x = \frac{2}{2 \times 2} = \frac{1}{2}$ رخ می‌دهد و برابر است با:

$$2\left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\left(\frac{1}{2}\right) + 1 = \frac{1}{2} - 1 + 1 = \frac{1}{2}$$

مختصات نقطه A واقع بر خط $y = 3x$ را به صورت $(x_1, 3x_1)$ و مختصات نقطه B واقع بر خط $y = -3x + 2$ را به صورت $(x_2, -3x_2 + 2)$ در نظر می‌گیریم. داریم:



$$AD = BC \Rightarrow 3x_1 = -3x_2 + 2 \Rightarrow x_1 + x_2 = \frac{2}{3} \Rightarrow x_2 = \frac{2}{3} - x_1$$

$$S_{\text{مستطیل}} = AB \times AD = (x_2 - x_1)(3x_1) = \left(\frac{2}{3} - x_1 - x_1\right)3x_1 = \left(\frac{2}{3} - 2x_1\right)3x_1 = -6x_1^2 + 2x_1$$

از آنجا که تابع S بر حسب x_1 از درجه دوم است، پس بیشترین مقدار آن در رأس سهمی اتفاق می‌افتد، یعنی:

$$x_1 = \frac{-b}{2a} = \frac{-2}{-12} = \frac{1}{6}$$

$$S_{\text{max}} = S\left(\frac{1}{6}\right) = -6\left(\frac{1}{6}\right)^2 + 2\left(\frac{1}{6}\right) = \frac{1}{6}$$